

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a X-a

Subiectul 1. Pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, elementele mulțimii M_a sunt punctele din plan cu afixele corespunzătoare rădăcinilor complexe ale ecuației

$$\frac{z}{1+2i} = \frac{a^2}{z-2ai}.$$

Arătați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, cu $a \neq b$, punctele din mulțimea $M_a \cup M_b$ determină o pereche de drepte paralele.

Subiectul 2. Fie $n \geq 3$ și $a_1, a_2, \dots, a_{n^3} \in \mathbb{N}^*$, pentru care $\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{a_k^2}} \geq 3n$.

Arătați că cel puțin două dintre cele n^3 numere, $a_1, a_2, \dots, a_{n^3}$, sunt egale.

Subiectul 3. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Arătați că

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} + \sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n)(n-(a_1 + a_2 + \dots + a_n))} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Subiectul 4. Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Arătați că există funcții bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$a^2 \cdot f^2 \left[(a^2 + 1)x \right] - 2af(x^4 + a^2) + 1 \leq 0, \text{ pentru orice } x \text{ număr real, dacă și numai dacă } a \in \{-1, 1\}.$$

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

Subiectul 1. Pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, elementele mulțimii M_a sunt punctele din plan cu afixele corespunzătoare rădăcinilor complexe ale ecuației

$$\frac{z}{1+2i} = \frac{a^2}{z-2ai}.$$

Arătați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, cu $a \neq b$, punctele din mulțimea $M_a \cup M_b$ determină o pereche de drepte paralele.

Soluție: Se obține ecuația $z^2 - 2azi - a^2(1+2i) = 0$,

1 punct

cu soluțiile $z_1 = -a$ și $z_2 = a + 2ai$

2 puncte

$M_a \cup M_b = \{(-a, 0), (a, 2a), (-b, 0), (b, 2b)\}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*, a \neq b$

1 punct

Punctele $(-a, 0), (a, 2a)$ sunt situate pe dreapta $d_a: y = x + a$

1 punct

Punctele $(-b, 0), (b, 2b)$ sunt situate pe dreapta $d_b: y = x + b$

1 punct

Concluzia $d_a \parallel d_b$, cu $d_a \neq d_b$ pentru $a \neq b$.

1 punct

Subiectul 2. Fie $n \geq 3$ și $a_1, a_2, \dots, a_{n^3} \in \mathbb{N}^*$, pentru care $\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{a_k^2}} \geq 3n$.

Arătați că cel puțin două dintre cele n^3 numere, $a_1, a_2, \dots, a_{n^3}$, sunt egale.

(Gazeta Matematică nr.9/2022)

Soluție: Presupunem că oricare două numere sunt distincte $a_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}^* \dots \dots \dots$ 1 punct

$$\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{a_k^2}} \leq \sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \dots \dots \dots$$

1 punct

$$\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{(k-1)k} + \sqrt[3]{k^2}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}} \dots \dots \dots$$

2 puncte

$$\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} < 3 \sum_{k=1}^{n^3} (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}) = 3n \dots \dots \dots$$

2 puncte

Deci $\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{a_k^2}} < 3n$, contradicție cu ipoteza..... 1 punct

Subiectul 3 . Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Arătați că

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} + \sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n)(n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n))} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Soluție: $a_i \in [0,1] \Rightarrow 1-a_i \in [0,1], \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \in [0,1]$ 1 punct

$\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n+1]{x}, \forall x \in [0,1]$ 1 punct

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \leq \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}} \leq \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}} \leq$$

$$\sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{n+1} \left(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) = \sqrt[n]{n} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n)(n-(a_1+a_2+\dots+a_n))} \leq$$

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{(1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n) \cdot \frac{1-a_1+1-a_2+\dots+1-a_n}{n}}$$

$$\leq \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{n+1} \left(1-a_1+1-a_2+\dots+1-a_n + \frac{1-a_1+1-a_2+\dots+1-a_n}{n} \right) =$$

$$\sqrt[n]{n} \cdot \left(1 - \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \right) \quad (2) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Din (1) și (2) rezultă concluzia1 punct

Subiectul 4 . Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Arătați că există funcții bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$a^2 \cdot f^2 \left[(a^2 + 1)x \right] - 2af \left(x^4 + a^2 \right) + 1 \leq 0, \text{ pentru orice } x \text{ număr real, dacă și numai dacă } a \in \{-1, 1\}.$$

Soluție: „ $\Rightarrow$ ” Înlocuim pe x cu a^2 și obținem $(a \cdot f(a^4 + a^2) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(a^4 + a^2) = \frac{1}{a}$

Înlocuim pe x cu 1 și obținem $(a \cdot f(a^2 + 1) - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(a^2 + 1) = \frac{1}{a}$ 3 puncte

$f(a^2 + 1) = f(a^4 + a^2)$ și cum f este injectivă $a^4 = 1 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$ 1 punct

„ $\Leftarrow$ ” Dacă $a = 1$ avem $f^2(2x) - 2f(x^2 + 1) + 1 \leq 0, f(x) = \frac{x}{2}$ verifică și este bijectivă

Dacă $a = -1$ avem $f^2(2x) + 2f(x^2 + 1) + 1 \leq 0, f(x) = -\frac{x}{2}$ verifică și este bijectivă..... 3 puncte